*Il numero misura la realtà
e permette di penetrarne
il significato*

PITAGORA

— Ciuchino vede in televisione una trasmissione di partite a *Poker*. La regia mostra sullo schermo le probabilità di vittoria dei giocatori, aggiornate a mano a mano che le carte vengono scoperte. Ciuchino si incuriosisce e chiede spiegazioni all'amico Volpone.

— Volpone acconsente a fornire a Ciuchino qualche nozione elementare sul calcolo delle probabilità, avvertendolo degli inganni di cui è disseminato il cammino. Propone anche dei piccoli problemi, fingendo soddisfazione quando Ciuchino mostra di imparare, ma, in realtà, gongolando quando questi cade nelle trappole che gli vengono tese.

Volpone — Iniziamo il nostro viaggio parlando di alcune leggi basilari del calcolo delle probabilità e di quanto sia difficile scoprirle, comprenderle e metterle in pratica.
Ti pongo un problema semplice: lanciando un dado (non truccato) che probabilità ho di fare un cinque?

Ciuchino — È fin troppo facile. Ci sono sei facce numerate da uno a sei. Pertanto la probabilità di fare un cinque è una su sei, il 16% circa.

— Bene. E se volessi scommettere sull'uscita di un cinque *oppure* di un tre?

— Anche questo è facile. Vinco due volte su sei, il 33% circa.

— Ottimo. La regola per ottenere la probabilità di due eventi che si escludono a vicenda è stata formulata da Gerolamo Cardano, un matematico del cinquecento.
Nel linguaggio moderno, la regola di Cardano è enunciata così: Se un processo casuale ha una pluralità di esiti ugualmente possibili, alcuni favorevoli e altri sfavorevoli, allora la probabilità di ottenere un esito favorevole è pari al numero di esiti *favorevoli* diviso per il numero di esiti *possibili*.

La serie di tutti i possibili esiti si chiama tecnicamente *spazio campionario*.
In altri termini, se un dado può atterrare indifferentemente su ciascuna delle sei facce, questi sei esiti formano lo spazio campionario; e se scommettiamo su due facce, le nostre possibilità di vittoria sono 2 su 6, come hai detto tu.
Adesso lancio due dadi e scommetto sul doppio cinque.

— È come prima. Uno su sei più uno su sei, quindi due su sei, il 33%.

— Errore! Tieni conto che i dadi sono due e che io scommetto su una combinazione di punti. È vero che il cinque esce una volta su sei sul primo dado, ma esce una volta su sei *anche* sul secondo e per vincere non basta che mi vada bene il primo *o* il secondo ma deve andarmi bene *contemporaneamente* il primo *e* il secondo.
È di tutta evidenza il fatto che i sei esiti possibili del primo dado si combinano con i sei esiti del secondo. Pertanto, se calcoliamo il numero totale degli esiti possibili nel lancio di due dadi vediamo che sono 6x6=36; tra questi *solo uno* è un doppio cinque: pertanto la probabilità di vincere è una su 36, meno del 3%.
Prossimo problema: voglio scommettere lanciando due dadi sull'uscita di un cinque *e* un tre.

— Non vedo la differenza. È come prima: 1 su 36.

— Ancora errore! Applica il concetto di spazio campionario. Gli esiti totali sono sempre 36, ma quelli favorevoli sono "cinque sul primo dado e tre sul secondo" ma *anche* "tre sul primo e cinque sul secondo", poiché non ho specificato i dadi su

cui devono apparire il cinque e il tre. Quindi ci sono *due* uscite favorevoli su 36, qualcosa tra il 5 e il 6%.
Avresti avuto ragione se io avessi scommesso "cinque sul primo dado *e* tre sul secondo". In questo caso ci sarebbe stata una sola combinazione possibile su 36, poiché "tre sul primo dado e cinque sul secondo" non soddisfa la mia ipotesi.
Nel calcolo delle probabilità è fondamentale definire bene lo spazio campionario e, al suo interno, il numero di casi favorevoli.
Il modo in cui viene formulato il problema ha un effetto decisivo sulla soluzione.

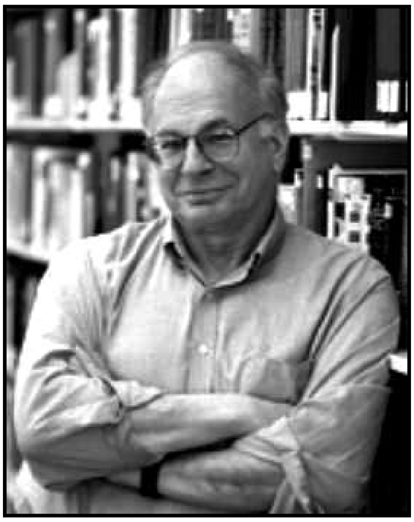
— Il calcolo effettivo rischia di diventare estremamente complesso. Cosa succede se lancio 100 dadi e scommetto su dodici numeri diversi?

— Il numero di possibilità che costituiscono lo spazio campionario può facilmente diventare più che astronomico.
Di questi numeri si occupa il calcolo combinatorio. Pensa che i modi diversi di disporre le 40 carte di un mazzo per giocare a scopa è pari a un numero di 48 cifre!

Per fortuna, esistono scorciatoie e formule che permettono di fare i calcoli agevolmente.

— Ho anche notato che i ragionamenti da fare possono essere ben lontani dall'intuito. La probabilità è una vera trappola.

— Verissimo. Il calcolo delle probabilità è molto lontano dall'intuizione, probabilmente perché il cervello umano si è evoluto in modo tale da ridurre al minimo i rischi per la sopravvivenza e tende in genere a sopravvalutare le probabilità di eventi negativi. È più facile scambiare un'ombra per un ladro che un ladro per un'ombra. Un *falso positivo* può essere una seccatura, ma un *falso negativo* può essere fatale.



Uno studio classico sul rapporto tra le leggi della probabilità e l'intuito consiste in un esperimento condotto nel 1982 dai ricercatori Daniel Kahneman[14] e Amos Tversky dell'università di Cambridge.

---

[14] **Daniel Kahneman** (Tel Aviv, 5 marzo 1934) è uno psicologo israeliano vincitore nel 2002, insieme a Vernon Smith, del Premio Nobel per l'economia "per avere integrato risultati della ricerca psicologica

Prova a ragionarci e imparerai qualcosa sul tuo intuito probabilistico. Kahneman e Tversky presentarono questa descrizione a un gruppo di 88 soggetti:

> Immaginate una donna di nome Francesca, trentun anni, *single*, estroversa, intelligente, laureata in filosofia.
>
> All'università era molto interessata ai temi della giustizia sociale e ha partecipato a manifestazioni contro il nucleare.

Quindi chiesero, tenendo presente la descrizione, di valutare in base alla loro probabilità alcune ipotesi su Francesca in una scala da 1 a 8, dove 1 rappresenta l'ipotesi più probabile e 8 la più improbabile. Questi sono i risultati, ordinati dal più al meno probabile:

Ipotesi	***Probabilità***
Francesca è attiva nel movimento femminista	2,1
Francesca lavora in una libreria e prende lezioni di yoga	3,3
Francesca fa l'impiegata in banca ed è attiva nel movimento femminista	4,1
Francesca insegna in una scuola elementare	5,2
Francesca fa l'impiegata in banca	6,2
Francesca fa l'assicuratrice	6,4

nella scienza economica in merito al giudizio umano e alla teoria delle decisioni in condizioni d'incertezza". (Fonte: Wikipedia)

A prima vista potresti non notare nulla di strano in questi risultati: la descrizione, infatti, era deliberatamente progettata per suggerire una femminista impegnata e non un'impiegata di banca o di un'assicurazione.

Ma ora concentriamoci su solo tre delle ipotesi e sulla loro probabilità media. Questo è l'ordine in cui il 90% degli intervistati le ha classificate:

Ipotesi	***Probabilità***
Francesca è attiva nel movimento femminista	2,1
Francesca fa l'impiegata in banca ***ed*** è attiva nel movimento femminista	4,1
Francesca fa l'impiegata in banca	6,2

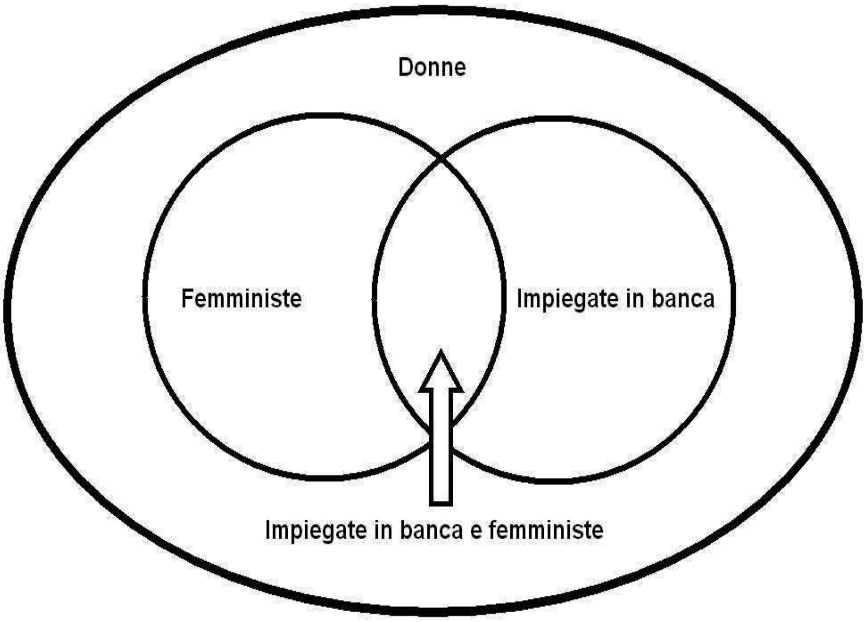
— E allora? Non vedo nulla di strano.

— Se non c'è nulla che ti sembra strano, allora Kahneman e Tversky sono riusciti a fuorviare anche te: perché se la probabilità che Francesca sia impiegata in banca *e contemporaneamente* sia attiva nel movimento femminista fosse più alta della probabilità che Francesca sia una bancaria *oppure* una femminista, allora saremmo in violazione della legge fondamentale della probabilità:

La probabilità che due eventi accadano insieme
non può mai essere maggiore della probabilità
che ciascun evento accada separatamente.

— Non credo di avere capito bene.

— E allora ti faccio un disegno:



Come vedi le donne impiegate in banca ***e*** femministe sono solo *una parte* delle donne impiegate in banca e solo *una parte* delle donne femministe. Le donne che lo sono *contemporaneamente* sono evidentemente in numero inferiore, e quindi è meno probabile incontrarle.

— Adesso è tutto più chiaro. Sarei potuto arrivarci anche da solo.

— Non è detto che ti sarebbe servito: Kahneman e Tversky non rimasero sorpresi dei risultati, perché avevano fornito ai primi soggetti interrogati un grande numero di possibilità, e i legami

fra le varie ipotesi potevano facilmente perdersi nella confusione.
Per controllare, presentarono la stessa descrizione di Francesca a un altro gruppo, ma stavolta offrirono *solo* queste tre possibilità:

> Francesca è attiva nel movimento femminista
> Francesca fa l'impiegata in banca
> ***ed*** è attiva nel movimento femminista
> Francesca fa l'impiegata in banca

Con loro sorpresa, anche stavolta quasi il 90% dei soggetti valutò più probabile l'ipotesi che Francesca fosse bancaria *e* femminista, piuttosto che fosse *solo* bancaria o *solo* femminista.
A questo punto i ricercatori si spinsero oltre: chiesero esplicitamente a un altro gruppo di 36 laureati considerati piuttosto brillanti di tenere in considerazione la suddetta legge delle probabilità prima di rispondere.
Anche dopo questo stimolo, sei dei soggetti rimasero fedeli alla risposta scorretta.

— Non si impara mai!

— Invece qualcosa di importante si dovrebbe imparare: ogni volta che si aggiunge un particolare a una descrizione, sembra, intuitivamente, di aumentare la precisione della congettura, e quindi di aumentarne la probabilità, mentre in realtà non si fa che *diminuire* il numero di casi che soddisfano *tutti* i particolari e questo rende il caso meno probabile.

Questa tendenza può condurre a valutazioni inique o errate in situazioni di vita reale, persino in casi della massima gravità.
Cosa è più probabile: che (A) un imputato, dopo avere scoperto il corpo della vittima, abbia lasciato la scena del crimine, o che (B) un imputato, dopo avere scoperto il corpo, abbia lasciato la scena del crimine perché temeva di essere accusato di omicidio?
È più probabile che il governo (A) decida di stanziare nuovi fondi per l'istruzione, oppure che (B) decida di stanziare nuovi fondi per l'istruzione con i fondi ottenuti tagliando altre voci di spesa?
È più probabile che (A) un'azienda aumenti le vendite l'anno prossimo, o che (B) un'azienda aumenti le vendite l'anno prossimo perché l'economia in generale avrà una buona annata?
In ciascuno di questi casi, la seconda opzione *è meno probabile* della prima, anche se può suonare più probabile.

Come concludono Kahneman e Tversky, "una buona storia è spesso meno probabile di una spiegazione poco soddisfacente".

— Faccio fatica: lo vedo, ma non lo credo!

— Sei in numerosa compagnia. Kahneman e Tversky scoprirono che anche medici esperti commettevano lo stesso errore.
In un altro esperimento, i due studiosi presentarono un grave problema medico a un gruppo di internisti: un'embolia polmonare.
Chi soffre di questo malanno, può accusare uno o più di una serie di sintomi. Alcuni di questi sintomi, come la paralisi parziale, sono rari; altri, come il fiato corto, sono piuttosto frequenti.
Cos'è più probabile: che la vittima di un'embolia accusi soltanto una paralisi parziale, oppure che accusi *sia* la paralisi parziale *sia* il fiato corto?
Kahneman e Tversky scoprirono che più del 90% dei medici riteneva *meno probabile* che un'embolia provocasse soltanto un sintomo raro, piuttosto che la combinazione di un sintomo raro *e* di uno più diffuso.

— Sembrerebbe invece più probabile la combinazione dei due sintomi. Non per niente, quando un medico fa la diagnosi di una malattia afferma con soddisfazione: ci sono *tutti* i sintomi!

— Proprio così. Occorre dire che le malattie che causano una paralisi parziale sono migliaia e che le malattie che causano il fiato corto sono altre migliaia, mentre le malattie che causano entrambi i sintomi sono *solo* alcune centinaia; pertanto, per praticità, si decide di partire da queste.

— È lo stesso motivo per cui si cura l'epatite come influenza per un paio di settimane, salvo fare altre indagini se a quel punto non passa. Non per niente sulle istruzioni dei farmaci da banco c'è scritto "se i sintomi persistono consultare un medico".

— Anni dopo, uno studente di Kahneman e un altro ricercatore scoprirono che anche gli avvocati si lasciano ingannare dagli stessi pregiudizi. Sia nei processi civili sia in quelli penali, i clienti, ovviamente, vorrebbero sapere dagli avvocati quale potrebbe essere l'esito del processo.
Gli avvocati, come i medici, sono maestri nell'eludere questo tipo di domande (non si può generalizzare – dicono – ogni caso fa storia a sé) ma, messi alle strette, tendono ad assegnare

probabilità più alte agli scenari descritti con più abbondanza di particolari.

— Mentre invece le ipotesi più semplici sono le più probabili. È il cosiddetto *rasoio di Occam*.

— Noto con piacere che ti sei acculturato. Per vedere se hai veramente capito, ti sottopongo un quesito: sono più numerose le parole italiane di sei lettere in cui la quinta è una *n* o le parole che finiscono in *one*?

— Non mi imbrogli: l'insieme delle parole italiane di sei lettere in cui la quinta è una *n* contiene l'insieme delle parole che finiscono in *one.* Pertanto il primo gruppo è più numeroso.
Un esempio è la parola *cucina*; ci sono sei lettere, *n* è la quinta, ma non finisce in *one*.

— Bravissimo! Ma continuiamo con storie di tribunale. Agatha Christie diceva che un fatto è un fatto, due fatti sono una coincidenza, tre fatti sono una prova.
La buona notizia è che oggi si tende a non ammettere più le prove basate solo su "tre indizi" ma si cerca un tipo di prove che siano sicure al 999 per mille. Tuttavia, come vedremo, si continua a commettere errori di logica.

— Infatti, è sempre più frequente l'utilizzo della prova del DNA, che è accreditata della massima attendibilità. Gli esperti di analisi del DNA non si stancano di testimoniare ai processi che se un campione di DNA raccolto sulla scena di un crimine coincide con quello prelevato da un sospettato, la colpevolezza dell'imputato è assolutamente certa.
Ma è davvero sicuro questo abbinamento?

— Quando fu introdotto l'uso giudiziario del DNA, molti esperti affermarono che i falsi positivi erano impossibili; anche oggi gli esperti di DNA affermano regolarmente che le probabilità che il DNA di una persona presa *a caso* coincida con il campione prelevato sulla scena del delitto sono meno di 1 su 1 miliardo; questo per indicare una probabilità bassissima, ma in realtà il DNA è come la targa di una automobile: non ce ne sono due uguali.

— Con simili cifre, non si può biasimare un giudice che pensi: "Buttate via la chiave!".

— Ma c'è un'altra statistica che, per quanto ne sappia, non viene presentata ai giudici: i laboratori di analisi a volte si sbagliano, per esempio

nel raccogliere o maneggiare un campione; mescolano o scambiano campioni per errore o sbagliano a interpretare o a riferire i risultati.
Ciascuno di questi errori è raro, ma neppure lontanamente raro quanto una coincidenza casuale tra due campioni di DNA.

Un laboratorio di criminologia di Philadelphia, in un caso famoso, ha ammesso di avere scambiato il campione dell'imputato con quello della vittima in un caso di stupro, e in un altro caso un altro laboratorio di analisi ha ammesso un errore simile.
Purtroppo la fiducia nell'esame del DNA è tale che una corte dell'Oklahoma ha condannato un uomo a oltre tremila anni di carcere benché undici testimoni che neppure si conoscevano avessero dichiarato che l'imputato si trovava in un altro stato al momento del crimine!

Si è poi scoperto che, nelle analisi, il laboratorio non aveva separato completamente il DNA dello stupratore da quello della vittima nel campione testato, e che la combinazione dei due DNA aveva prodotto un risultato positivo in relazione al DNA dell'imputato. Un nuovo test ha chiarito l'errore, e l'imputato è stato rilasciato; purtroppo dopo quasi quattro anni di reclusione.

— Sembra la storia di Yara e di Bossetti. Quindi stai dicendo che non c'è da fidarsi del test del DNA?

— No! Sto dicendo che, anche se il test del DNA è in linea di principio assolutamente sicuro, il metodo di analisi può portare a errori per difficoltà oggettive.

— È un po' quello che sostengono gli avvocati di Bossetti.

— Sì, ma non ricordo di averli sentiti parlare di errori del laboratorio. Sembra piuttosto che, con atteggiamento spiccatamente antiscientifico paragonabile solo a quello della madre di Bossetti che sembrerebbe averlo concepito, senza neppure accorgersene, tra una corsa in pullman e l'altra, stiano mettendo in dubbio l'unicità del DNA.
O almeno questo è quello che sembra, leggendo i giornali.

— Da quando si è scoperto che gli appartamenti acquistati da alcuni uomini politici vengano pagati a loro insaputa, non mi stupisco più neppure di una madre così distratta.

— La mia opinione è che se avessero detto a Bossetti: "Sei stato tu, ci sono le tue impronte!" lui avrebbe confessato e tutto sarebbe finito lì.

— In effetti, le impronte digitali hanno fama di essere più attendibili del DNA.

— È perché si tratta di un concetto che fa ormai parte della cultura comune, mentre il DNA risulta un argomento ancora ostico; però non è un atteggiamento corretto. Infatti, non tutti sanno che, quando si esamina un'impronta, in realtà si cerca la corrispondenza tra un paio di decine di punti, mentre per il DNA si hanno a disposizione, volendo, miliardi di molecole. È recente la notizia che si stia iniziando a discutere sulla valutazione scientifica dell'esame delle impronte, con l'intento di quantificare il margine di errore che si può commettere.

— Esistono statistiche sugli errori di laboratorio?

— Non ci sono statistiche scientificamente valide; si stima tuttavia che un falso positivo nel test del DNA possa accadere in un caso su mille al mas-

simo (magari l'avvocato difensore potrebbe fare leva sul fatto che Bossetti si chiama Massimo).
Ma è solo un ordine di grandezza, non è un numero su cui si possano fare dei calcoli rigorosi.

— Un caso solo su mille permette comunque di giungere a una conclusione valida. Mi sembra che non possa sussistere la fattispecie del "ragionevole dubbio".

— Dirò di più. Se fosse risultato che il DNA nel caso di Bossetti apparteneva a uno dei centenari sardi che ha passato in modo documentabile tutta la vita in un ovile sul Gennargentu, allora sarebbe stato doveroso sospettare un errore e indagare ulteriormente, per scongiurare un altro caso come di quell'americano finito in galera pur avendo undici testimoni a favore.
Però il caso vuole che il DNA in oggetto fosse associabile a un individuo (Bossetti) che passava tutti i giorni col suo furgone davanti alla scuola di Yara.

— Capisco. Non solo hanno trovato il possibile proprietario del DNA ma hanno anche stabilito che questo individuo frequentava abitualmente i luoghi della vittima.

— E, come sappiamo, più indizi si inseriscono in una storia e più la storia diventa improbabile. È pertanto molto, molto improbabile che Bossetti sia innocente.

— Il vero quesito allora è: qual è la probabilità che Bossetti sia colpevole sapendo che (A) il DNA è suo e sapendo che (B) abita nelle vicinanze e passa spesso davanti alla scuola della vittima? Risposta: "Buttate via la chiave!".

— Sono d'accordo. Sempre restando nei tribunali, vorrei farti riflettere sul caso di O. J. Simpson di alcuni anni fa, ma che ancora fa discutere.

— Me lo ricordo benissimo. Si tratta di un giocatore di *football* americano, accusato di avere ucciso la ex moglie, assolto con una sentenza clamorosa.

— Proprio lui. In quel caso l'avvocato di O. J. ha utilizzato a vantaggio della difesa un fenomeno conosciuto come *Fallacia del Pubblico Ministero* perché accade, più spesso di quello che si pensi, che l'accusa impieghi delle argomentazioni errate pur di spingere il giudice a condannare l'imputato sulla base di prove deboli.

— Nel caso di O. J. però c'erano numerosi indizi di colpevolezza.

— È vero, ma poiché non si riusciva a concludere, l'accusa a un certo punto decise di concentrarsi sulla propensione di O. J. alla violenza contro la ex moglie.
Gli avvocati dell'accusa passarono alcuni giorni del dibattimento a elencare gli episodi di violenza perpetrata dall'imputato, e affermarono che questa era una ragione sufficiente per sospettarlo dell'omicidio. Dissero in sostanza: "Uno schiaffo è l'anticamera dell'assassinio".

— Mi sembra un argomento di un certo valore. Se l'indiziato è violento, questo è un punto a suo sfavore.

— Ma non è andata così. Gli avvocati difensori ritorsero questa strategia contro l'accusa, che a loro dire aveva agito al solo scopo di cercare di sviare la giuria, e sostennero che le prove che O. J. avesse picchiato la ex moglie in occasioni precedenti non significavano nulla: ogni anno negli Stati Uniti quattro milioni di donne sono regolarmente picchiate da mariti e fidanzati, eppure nell'anno precedente, secondo l'FBI, le donne

uccise da mariti o fidanzati erano state 1432, cioè 1 su 2500 circa.
Quindi, secondo la difesa, ben pochi uomini che schiaffeggiano o picchiano le compagne finiscono per ucciderle. Anzi, solo 1 su 2500.

— Ecco perché lo hanno assolto. Con una probabilità così ridotta è evidente che non poteva essere stato lui.

— Ne sei davvero convinto? Io no. Il numero da citare in questo caso non è la probabilità che un uomo che picchia la moglie finisca per ucciderla (1 su 2500) ma piuttosto la probabilità che una moglie maltrattata e uccisa sia stata uccisa dalla stessa persona che l'aveva maltrattata.
Sono due cose diverse.

— Capisco. È un po' come dire "non tutti quelli che fumano hanno il cancro ai polmoni" però la maggioranza di quelli che hanno il cancro ai polmoni hanno fumato.

— Esatto. Da un lato è una fortuna, perché altrimenti i morti sarebbero 100 volte di più; dall'altro si alimenta la convinzione diffusa tra i fumatori che dicono: "A me non fa male. Sono trent'anni che fumo".

Nel caso di O. J. la statistica corretta da citare doveva essere questa: di tutte le donne maltrattate che sono state uccise, più del 90% sono state uccise *dalla stessa persona* che le maltrattava. Questo dato statistico non fu citato al processo.

— L'accusa c'è cascata in pieno e c'è stato un vero imbroglio da parte della difesa. Adesso capisco perché tante polemiche, a suo tempo.

— Dirò di più. L'avvocato si è sentito *in diritto* di ingannare la giuria al punto di dichiarare: "Il giuramento di dire la verità, tutta la verità e nient'altro che la verità si applica solo ai testimoni. La difesa, l'accusa e i giudici *non giurano*".

— È come dire che in un sistema che si basa sul *libero convincimento del giudice* è ammesso qualsiasi mezzo. L'unico scopo è quello di arrivare a convincerlo. C'è da rabbrividire!

— Se vogliamo continuare la polemica, aggiungerei che la scritta *La Legge è uguale per tutti* non dovrebbe stare alle spalle dei giudici, ma bene in vista *davanti* a loro. Ma questa è un'altra storia.

*   *   *

— Un problema spesso illustrato nei corsi elementari di teoria della probabilità è quello detto “delle due figlie”.
Supponiamo che una madre sia incinta di due gemelli e voglia conoscere le probabilità che nascano due femmine, oppure un maschio e una femmina.
Lo spazio campionario è composto da tutte le possibili liste del sesso dei bambini nel loro ordine di nascita: FF, FM, MF e MM.

— Lascia che provi io. Posso calcolare la probabilità che *entrambi* i bambini siano femmine: c'è un solo caso (FF) su 4, cioè il 25%.

— Bene, andiamo avanti con una domanda leggermente più difficile. Qual è la probabilità che *almeno uno* dei figli sia femmina?

— Considerando lo spazio campionario FF, FM, MF e MM e i casi favorevoli FF, FM e MF, vedo subito che la probabilità che nasca una femmina è di 3 su 4, quindi il 75%.

— Bravo! Nel problema delle due figlie può sorgere un'altra domanda: quante probabilità ci sono che *entrambe le gemelle siano femmine, posto che una delle due è femmina*?

— Ragiono in questo modo: sapendo che una delle due è femmina, resta un solo gemello da considerare. La probabilità che quel secondo gemello sia una femmina è del 50%, quindi la probabilità che entrambi i bambini siano femmine è del 50%.

— Questo ragionamento è sbagliato. Stai attento: sebbene l'enunciato del problema dica che uno dei bambini è femmina, *non dice quale dei due* e questo cambia la situazione.

— La faccenda si è fatta complicata!

— Se ti sembra complicata, nessun problema: perché la potenza del metodo di Cardano ti aiuterà a chiarire la situazione.
La nuova informazione *(uno dei gemelli è femmina)* significa che possiamo eliminare la possibilità che entrambi i gemelli siano maschi. E così, impiegando il metodo di Cardano, eliminiamo dallo spazio campionario (FF, FM, MF, MM) l'esito MM. Nel nuovo spazio campionario restano quindi solo tre risultati possibili: FF, FM, e MF.
Tra questi, solo FF è l'esito favorevole (cioè entrambi i gemelli sono femmine) quindi la proba-

bilità che nascano due femmine è 1 su 3, ovvero il 33%.
Diventa pertanto chiaro il motivo per cui era importante che l'enunciato del problema non specificasse quale dei due gemelli era femmina.

Per esempio, se il problema avesse chiesto la probabilità di due femmine *dato che il primo gemello è una femmina,* allora avremmo dovuto eliminare dallo spazio campionario sia MM sia MF lasciando solo FM e FF e le probabilità sarebbero state 1 su 2, cioè il 50%.
La differenza è sottile, ma la soluzione del problema è diversa perché diverso è il problema.

— Vedo che anche un problema apparentemente semplice come quello delle due figlie ha il potere di farmi venire il mal di testa. Comunque ho capito che è della massima importanza definire con precisione il problema e ragionare con attenzione nella definizione dello spazio campionario, ignorando quello che l'istinto potrebbe suggerire.

— Bene. È venuto il momento di parlare del teorema di Bayes.

— Chi è il signor Bayes e cos'ha fatto?

— Il reverendo Thomas Bayes (1702–1761) era un matematico dilettante che ha formulato una teoria della *probabilità condizionale* per mostrare

che il calcolo delle probabilità può essere esteso, oltre che all'analisi di eventi indipendenti l'uno dall'altro, anche a eventi i cui esiti sono collegati.

Per esempio, la probabilità che un uomo scelto a caso sia malato di mente e la probabilità che un uomo scelto a caso ritenga che il coniuge sappia leggergli nella mente sono entrambe molto basse.
Ma la probabilità che un uomo sia malato di mente *se* ritiene che il coniuge gli legga i pensieri è molto più elevata, così come la probabilità che un uomo ritenga che il coniuge gli legga nel pensiero *se* quell'uomo è malato di mente.

Come sono collegate tutte queste probabilità? È la domanda cui risponde la teoria della probabilità condizionale.

Il teorema di Bayes è un potente motore matematico in grado di trattare una pluralità di eventi, ciascuno con la sua probabilità di accadimento. Molti errori nelle diagnosi mediche e nelle sentenze dei tribunali derivano dall'ignoranza delle idee di Thomas Bayes.

— Non mi risulta, infatti, che la formazione professionale di un medico o di un avvocato comprenda un adeguato approfondimento di questi argomenti.

— Nella vita quotidiana esprimiamo continuamente giudizi bayesiani, tutte la volte che ipotizziamo l'evento (A) dopo che sia accaduto l'evento (B). Ti faccio un esempio semplicissimo. Sai dirmi che tempo farà domani?

— Non comprendo il nesso, ma sì: credo di poter dire che probabilmente pioverà, considerando che oggi è caldo e umido e sta arrivando aria fredda dal nord.

— Ottimo. Il tuo ragionamento espresso in termini più tecnici è questo: qual è la probabilità di pioggia domani *sapendo che* dell'aria fredda sta per investire dell'aria calda e umida?

Si risponde applicando il teorema di Bayes. Ma prima di illustrarla con degli esempi voglio farti riflettere ancora un po'.

Ricordo il racconto di un uomo con un ottimo lavoro e una splendida famiglia: ama la moglie e i figli eppure gli sembra che manchi qualcosa nella sua vita. Una sera, tornando a casa, vede una donna bellissima dall'aria pensierosa affacciata a una finestra. Torna a cercarla, per pura curiosità, la sera dopo, e la sera dopo, e ancora, e ancora. Tiene però segreta alla famiglia la sua ossessione, accampando scuse per il ritardo nel rientro a casa.
Alla fine la moglie scopre che il marito non resta al lavoro fino a tardi come le aveva detto.
Poiché ritiene che le probabilità che un marito menta siano più elevate *se* questo ha una relazione, *conclude* che il marito abbia effettivamente una relazione.

Si sbaglia: non solo nelle conclusioni, ma nel metodo. Ha fatto confusione tra la probabilità che il marito ritardasse senza dirle il motivo se la tradiva e la probabilità che la tradisse se ritardava senza dirle il motivo.

È un errore frequente. Le probabilità sono differenti. Il teorema di Bayes mostra che la probabilità che si verifichi l'evento A se si verifica l'evento B differirà, in genere, dalla probabilità che si verifichi B se si verifica A.
Non tenere conto di ciò è un errore frequente nella professione medica.

— Hai altri esempi?

— Ce ne sono finché se ne vuole. Questo è tratto dalla vita reale. Ipotizziamo che il tuo capo ci metta più del solito a rispondere alle tue e-mail. Molte persone si convincerebbero di non essere più nelle grazie del datore di lavoro, perché, se si cade in disgrazia, ci sono alte probabilità che il capo ci metta più tempo a rispondere alle nostre e-mail. Ma può anche darsi che il capo sia molto impegnato, o che abbia dei problemi personali. E quindi le probabilità di essere caduti in disgrazia se il capo ci mette più del solito a rispondere sono molto più basse delle probabilità che il capo tardi a rispondere se siete caduti in disgrazia.
Il fascino di molte teorie del complotto deriva dal fraintendimento di questa logica, cioè dalla confusione tra la probabilità che una serie di eventi

accada se è il prodotto di un enorme complotto, e la probabilità che esista un enorme complotto se accade una serie di eventi.

— Questa si chiama paranoia. Hai esempi di applicazioni pratiche del teorema di Bayes?

— Subito. Comincerò col raccontarti la storia della signora Jeanne Calment, vissuta ad Arles, nel sud della Francia.

— Sono certo che sarà interessante, come le altre storie. Ascolto con attenzione.

— Verso la metà degli anni Sessanta del secolo scorso, la novantenne Jeanne Calment, in difficoltà economiche, si accordò con un avvocato di quarantasette anni: gli cedette il suo appartamento in cambio di una modesta rendita mensile, vita natural durante; alla sua morte, l'avvocato sarebbe diventato proprietario dell'appartamento.

— È la cessione della nuda proprietà. Si usa sempre più frequentemente anche da noi. In pratica è una scommessa sulla vita di chi vende.

— Esatto. Di solito è conveniente farla quando il venditore raggiunge una "certa età", poiché il compratore non vuole correre il rischio di aspettare troppo tempo.

L'avvocato compratore sapeva che la signora Calment aveva già superato di oltre dieci anni l'aspettativa di vita delle donne francesi; ma con tutta probabilità il suo piano di studi non comprendeva il teorema di Bayes, e non sapeva che il dato rilevante non era il fatto che la donna sarebbe dovuta morire dieci anni prima, ma il fatto che la sua aspettativa di vita, essendo già arrivata a 90 anni, era di circa altri sei.

— Evidentemente, l'avvocato confidava nel fatto che una donna che da giovane aveva conosciuto Vincent van Gogh avrebbe presto raggiunto il bizzarro artista nell'aldilà.

— Per la cronaca, la Calment aveva trovato van Gogh "sporco, malvestito e antipatico".

Dieci anni dopo, l'avvocato presumibilmente si era dovuto procurare un alloggio alternativo, perché Jeanne Calment celebrò il centesimo compleanno in buona salute.

A quel punto la sua aspettativa di vita era di circa altri due anni, eppure raggiunse anche i 110, sempre a spese dell'avvocato, che nel frat-

tempo ne aveva compiuti sessantasette. Passò un altro decennio prima che la lunga attesa dell'avvocato volgesse alla conclusione, ma non fu la conclusione che si era atteso.
Nel 1995 l'avvocato morì, e Jeanne Calment era ancora viva. Il suo giorno arrivò infine il 4 agosto 1997 a centoventidue anni. L'età raggiunta al momento della morte superava di 45 anni l'età a cui era morto l'avvocato.

— L'avvocato ha fatto un pessimo affare. Tuttavia non poteva immaginare di dover pagare un vitalizio a una donna che sarebbe finita sul Libro dei Record per la longevità.

— È vero, non lo poteva immaginare, ma noi qualche cosa l'abbiamo imparata.
Intanto sappiamo che l'aspettativa di vita di una donna al momento della nascita è di 80 anni circa. Tuttavia sappiamo anche che ce ne sono parecchie che superano questa età e, per poter fare una stima ragionevole di quanto ci verrebbe a costare la nuda proprietà di un'ottuagenaria, dobbiamo rivolgerci alle statistiche sulla sopravvivenza della popolazione e fare alcuni ragionamenti bayesiani.

— Perfino io riesco a capire che se l'aspettativa di vita media è di 80 anni non posso aspettarmi che un individuo di 79 muoia esattamente entro un anno. Ma, in pratica, come devo regolarmi?

— Esistono delle tabelle, come questa, elaborate dagli istituti di statistica:

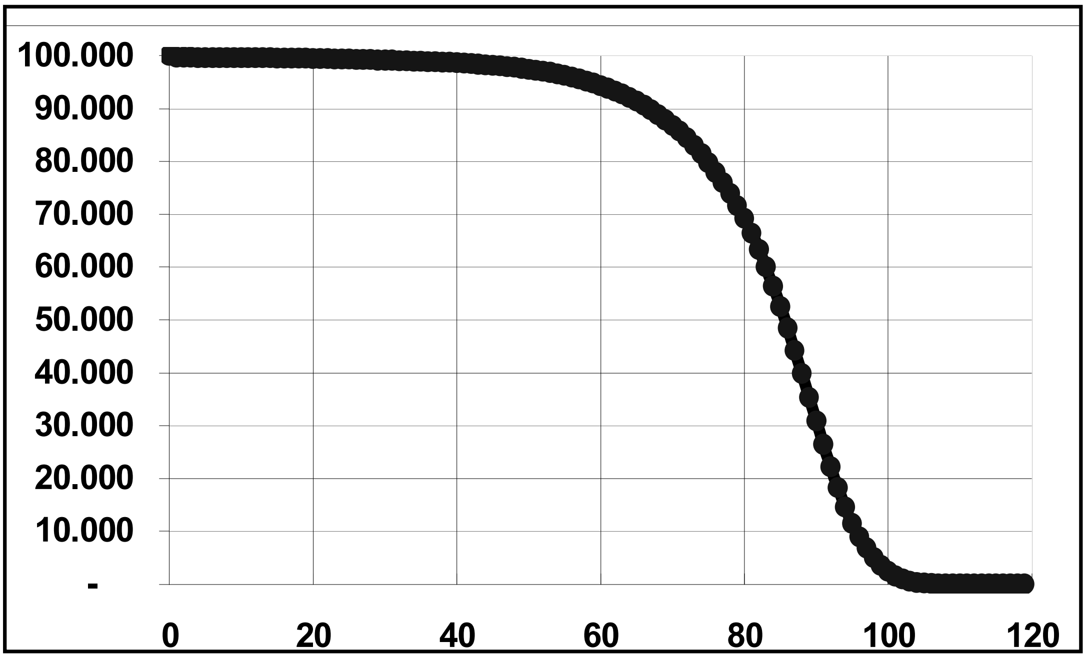


Tavola di sopravvivenza della popolazione. Italia - Maschi e femmine - 2016

— Puoi commentarla, come tu sei solito fare?

— Certo. Il grafico illustra il numero di individui sopravvissuti a ciascuna età, partendo da una popolazione iniziale di 100.000 unità.
Se guardi in corrispondenza dell'età di 80 anni vedi che del gruppo iniziale di 100.000 ne sono sopravvissuti circa 70.000. Questo dato si può

interpretare come una probabilità: alla nascita, c'è il 70% di probabilità di raggiungere l'età di 80 anni.

— Tutto sommato, non è male.

— È vero, ma da qui in poi le cose peggiorano rapidamente: all'età di 90 anni ne sopravvivono circa 30.000 e all'età di 95 ne sopravvivono solo circa 10.000, cioè il 10%.
A questo punto ho tutto quello che mi serve per il mio ragonamento bayesiano: comincio chiedendomi *qual è la probabilità per una persona di arrivare a 90 anni, sapendo che ne ha già vissuti 80*?
La risposta si ottiene inserendo nella formula di Bayes le probabilità dei due eventi: (A) sopravvivere fino a 80 anni e (B) sopravvivere fino a 90 anni. Facendo i calcoli: 30% / 70% = 30/70 = 0,42857 = 43% circa.

— Stavolta ho capito perfettamente! Posso anche interpretare il risultato in questo modo: di una popolazione di 70.000 ottantenni, solo 30.000 arrivano ai 90 anni. Pertanto, la probabilità è pari a: *numero di casi favorevoli / numero dei casi dello spazio campionario*. Cioè 30.000/70.000 = 0,42857 = 43% circa, come dice Bayes.

— Sei diventato un fenomeno! Adesso cambiamo discorso e spiegami perché è sbagliato sperare di vincere al lotto puntando sui numeri ritardatari.

— Questo lo so. Chi punta sui numeri ritardatari fa conto sul fatto che, su un numero abbastanza grande di estrazioni, ciascun numero dovrebbe essere estratto con la stessa frequenza. Pertanto se per qualche motivo un numero particolare non lo fa, è in qualche modo obbligato successivamente a uscire più spesso per compensare il ritardo.
Questa è la *teoria dei ritardi*; so che è sbagliata, ma francamente non capisco quale sarebbe l'errore nel ragionamento.

— L'errore consiste nel fatto di presupporre che qualcuno, o qualcosa, sia in grado di ricordare i risultati delle singole estrazioni e poi di provvedere alla compensazione dei ritardi.

Non è così. Il sistema non ha memoria e le singole estrazioni sono tutte indipendenti.
Lo stesso vale per giochi simili, come il lancio dei dadi o di una moneta. Per comodità di calcolo, facciamo riferimento al lancio di una moneta e, ragionando come il reverendo Bayes, chiediamo-

ci: qual è la probabilità che esca Testa dopo una serie di 10 Croci?
O meglio, più tecnicamente: *qual è la probabilità di ottenere T sapendo che sono già uscite 10 C?*
Se ipotizziamo una moneta non truccata, T o C hanno la stessa probabilità ½ di uscire a ogni lancio. Pertanto, la probabilità di ottenere 10 C consecutive è pari a $1/2^{10}$ = 1/1000 circa mentre la probabilità di ottenere 11 C consecutive è pari a $1/2^{11}$ = 1/2000 circa.

Abbiamo allora tutti i dati per usare la formula di Bayes. La probabilità di ottenere C sapendo che sono già uscite 10 C è pari a:
(1/1000) / (1/2000) = 1000/2000 = ½ = 50%.
Quindi l'uscita di 10 C non ha alcuna influenza sull'esito dell'undicesimo lancio. QEDAMDG
Domande?

— Una sola. Cosa vuol dire QEDAMDG ?

— Significa "*Quod Erat Demonstrandum Ad Maiorem Dei Gloriam* (ciò che si doveva dimostrare per la maggior gloria di Dio). È la formula che anticamente chiudeva le dimostrazioni matematiche.

— Mi sembra un po’ medioevale, ma mi piace. E mi ha entusiasmato seguire il ragionamento.

— Quindi siamo pronti per tentare una leggera variazione sul problema delle due figlie, la cui risoluzione può rivelarsi un po’ sorprendente. La variante è questa: *in una famiglia con due figli, quali sono le probabilità, se uno dei due è una bambina di nome Teodolinda, che entrambi i figli siano femmine?*

Ovviamente, i dettagli del teorema ai Bayes sono piuttosto complessi. Ma, come ho accennato parlando del problema classico delle due figlie, il suo approccio si basa sull’impiego anche delle nuove informazioni per sfoltire lo spazio campionario e adeguare di conseguenza le probabilità.

Nel problema classico delle due figlie lo spazio campionario iniziale era MM, MF, FM e FF ma si riduceva a MF, FM e FF se apprendevamo che uno dei figli era femmina, per cui le probabilità di una famiglia con due figlie femmine diventava 1 su 3. Applichiamo la stessa strategia per vedere cosa succede se sappiamo che uno dei figli è una bambina di nome Teodolinda.

Nel problema della bambina di nome Teodolinda, le informazioni di cui disponiamo non concernono solo il sesso dei due bambini ma anche, per le femmine, il nome.
Poiché il nostro spazio campionario originale dev'essere una lista di tutte le possibilità, in questo caso la lista deve elencare sesso e nome. Se indico "maschio" come M, "femmina di nome Teodolinda" come T e "femmina non di nome Teodolinda" come F, scrivo lo spazio campionario in questo modo: MM, MT, MF, TM, FM, FT, TF, FF, TT.

— È il solito meccanismo per cui ciascuna possibilità si può combinare con ciascun'altra. Infatti abbiamo 9 casi, cioè 3x3.

— Molto bene. Ora dobbiamo sfoltire l'elenco. Poiché sappiamo che uno dei bambini è femmina *e* si chiama Teodolinda, possiamo ridurre lo spazio campionario a 5 casi: MT, TM, FT, TF, TT.
Ciò conduce a un aspetto cruciale in cui questo problema differisce da quello delle due figlie. Qui, poiché non è altrettanto probabile che il nome di una bambina sia o non sia Teodolinda,

non tutti gli elementi dello spazio campionario sono ugualmente probabili.
Supponiamo che solo una bambina su un milione riceva il nome Teodolinda. La probabilità che entrambe le bambine si chiamino Teodolinda (anche ignorando il fatto che i genitori tendono a non dare lo stesso nome a due figlie) sono così remote che possiamo a buon diritto ignorare la possibilità TT.
Ci restano dunque soltanto MT, TM, FT, TF, che si possono considerare come ugualmente probabili. Poiché 2 su 4, cioè metà, degli elementi nello spazio campionario sono famiglie con due figlie femmine (FT e TF), la risposta non è 1 su 3, com'era nel problema delle due figlie, ma 1 su 2.
L'informazione aggiuntiva, cioè il nome della bambina, fa la differenza.

Il cuore di tutti i ragionamenti fatti sinora è che la potenza del teorema di Bayes risiede nel fatto che fa il miglior uso di tutte le informazioni disponibili. Inoltre, è in grado in qualsiasi momento di recepire e gestire eventuali nuove informazioni che dovessero diventare conosciute.

Mi piace dire che Bayes ha trovato un modo per attribuire un valore scientifico e calcolabile all'esperienza.

— Mi sembra una bellissima conclusione. Abbiamo finito?

— Il bello deve ancora venire. Vorrei presentarti un esempio di problema probabilistico particolarmente controintuitivo. È noto come il *problema di Monty Hall*.

— Vediamolo. Sono pronto a tutto.

— Supponiamo che i concorrenti di un quiz a premi possano scegliere fra tre porte: dietro una porta c'è un'auto di lusso, una Ferrari, dietro le altre due ci sono due capre. Dopo che un concorrente ha scelto una porta senza aprirla, il presentatore, che conosce il contenuto di ciascuna porta, apre una delle altre due e rivela una capra.
Poi chiede al concorrente: "Vuoi cambiare la tua scommessa e scegliere l'altra porta, che è ancora chiusa?".

— Perché si chiama "problema di Monty Hall"?

— Perché si ispira al quiz televisivo *Let's Make a Deal* trasmesso negli USA in varie versioni dal

1980 al 1991. Il pezzo forte dello show era il presentatore Monty Hall, da cui viene il nome del problema. Domanda: al concorrente conviene cambiare porta? Tu cosa faresti?

— La Ferrari è sicuramente dietro una delle due porte chiuse: la mia oppure quella che il presentatore non ha aperto. Pertanto siamo pari, non vedo alcun motivo di cambiare la mia porta; le probabilità sono entrambe al 50%.

— Ragioniamo con la solita calma e ricapitoliamo: nel problema di Monty Hall inizialmente hai di fronte tre porte: dietro una porta c'è una Ferrari rossa fiammante, dietro le altre due c'è un premio meno allettante, la famosa capra.

Hai scelto la porta numero 1. Lo spazio campionario è la lista dei seguenti tre esiti possibili:

La Ferrari è dietro la porta numero 1
La Ferrari è dietro la porta numero 2
La Ferrari è dietro la porta numero 3

Ciascuno di questi casi ha una probabilità di 1 su 3. Poiché ritiengo che tu, come la maggior parte delle persone, preferiresti vincere la Ferrari, il primo caso è quello vincente, e le probabilità di indovinare sono 1 su 3.

Il passo successivo, stando al problema, è che il presentatore, che conosce il contenuto di tutte le porte, ne apre una che non hai scelto, rivelando una delle capre. Aprendo questa porta, il presentatore usa le proprie conoscenze per *non* rivelare dov'è la Ferrari, quindi non è un processo casuale.

Ci sono allora due casi da considerare.

Uno è il caso in cui la tua scelta iniziale sia corretta.

Il presentatore apre *a caso* la porta 2 o la porta 3 e se scegli di cambiare, invece di correre sulla pista di Monza, puoi trovarti a pascolare la tua capretta (nel parco di Monza, se vuoi).

Nello caso della scelta iniziale fortunata, cambiare sarebbe un errore, ma la probabilità che ti trovi nella ipotesi fortunata è solo di 1 su 3.

L'altro caso da considerare è quello in cui la scelta iniziale sia sbagliata.

Le probabilità di avere sbagliato sono 2 su 3, quindi questo scenario ha il doppio di probabilità rispetto a quello della scelta fortunata. E allora ti conviene cambiare, con una probabilità doppia di vittoria.

In cosa differiscono i due scenari? Nello scenario della scelta iniziale errata, la Ferrari si trova dietro una delle porte che non hai scelto e dietro l'altra porta c'è una capra. Ma in questo caso, il presentatore non sceglie *a caso* la porta da aprire perché deve sceglierne una con la capra. Quindi l'intero processo *non è più casuale*, e questo ti dovrebbe far capire che devi cambiare la tua scelta.

— Faccio fatica a capire. Non riesco a vedere esattamente il ruolo del presentatore e come questo riesca a influenzare il gioco. Capisco che, in qualche modo, mi sta dando una informazione preziosa di cui dovrei tenere conto, ma non capisco come fare.

— Effettivamente, il problema non è di immediata comprensione. Alcuni matematici professionisti sono stati tratti in inganno e altri, una volta conosciuta la soluzione, hanno detto come te in un'altra occasione: *lo vedo, ma non lo credo*. Sono state fatte anche numerose simulazioni al computer del gioco, che hanno dato l'esito indicato: *nel caso di scelta iniziale errata (che càpita 2 volte su 3) è conveniente cambiare porta*.

— Insisto: *lo vedo, ma non lo credo*.

— Allora vediamo il problema sotto un'altra luce. Immagina di avere non 3 ma 100 porte. Tu ne scegli una e il presentatore apre 98 porte con la rispettiva capra, lasciandone una chiusa. Ora, la Ferrari è dietro la tua porta oppure dietro l'ultima porta non aperta.
Ma, attenzione! la probabilità di aver scelto inizialmente la porta giusta stavolta è solo di 1/100, pertanto la probabilità che si trovi dietro l'ultima è pari al 99/100.

— Adesso ho capito. Sarei pazzo a non cambiare!

— Vediamo per ultimo un altro gioco pazzo. Non c'entra la probabilità, ma serve a imparare a usare i numeri per capire le cose del mondo.
Supponi che lo Stato faccia ai suoi cittadini la seguente offerta: tra tutti coloro che pagano un Euro di iscrizione, la maggior parte non riceverà nulla, una persona vincerà una fortuna, e una persona morirà di morte violenta.
Vuoi partecipare al concorso?

— Sicuramente no. È vero che posso vincere una fortuna ma posso anche morire malamente e questo è un rischio che non voglio correre.

— Invece la gente lo fa spesso e con entusiasmo. Il gioco si chiama *lotteria statale*. E benché lo Stato non pubblicizzi il concorso nel modo in cui l'ho descritto, è così che funziona in pratica.

— Sospetto che ci sia qualcuno dei tuoi trucchi…

— Nessun trucco: mentre una sola persona fortunata vince il primo premio della lotteria, molti milioni di partecipanti vanno e vengono dal rivenditore per comprare i biglietti, e alcuni possono morire in incidenti stradali lungo il viaggio. Applicando le statistiche della sicurezza stradale, e facendo alcune ipotesi sul numero di biglietti acquistati, sui chilometri percorsi, e sul numero di persone che restano coinvolte in un incidente, scopriamo che una stima plausibile di morti per acquistare i biglietti è di circa uno per ogni lotteria.

— Mi sembra paradossale!

— Ma è così. È il potere dei numeri. Ti faccio un altro esempio: nei mesi successivi agli attacchi dell'11 settembre 2001 a New York, i viaggiatori, timorosi di prendere un aereo, passano in massa all'automobile.

La loro paura si traduce in circa mille incidenti mortali in più rispetto allo stesso periodo dell'anno precedente: sono tutte vittime non conteggiate, ma non per questo meno reali, degli attacchi dell'11 settembre.